3.3 Grundeigenschaften

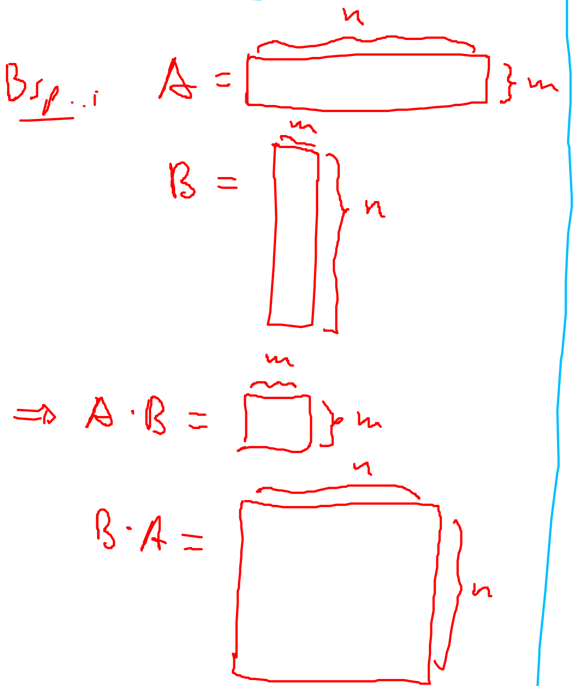
Proposition: Für alle Matrizen A, B, C über K und alle λ, $\mu \in K$ gilt, sofern die Matrizen die für die jeweilige Formel richtige Grösse besitzen:

$$
\begin{aligned}
A + (B + C) &= (A + B) + C && \text{(Assoziativität der Addition)}\\
A + B &= B + A && \text{(Kommutativität der Addition)}\\
O_{m,n} + A &= A && \text{(Neutrales Element der Addition)}\\
A + (-1) \cdot A &= O_{m,n} && \text{(Inverses Element der Addition)}\\
\lambda \cdot (A + B) &= \lambda \cdot A + \lambda \cdot B && \text{(Linksdistributivität der skalaren Multiplikation)}\\
(\lambda + \mu) \cdot A &= \lambda \cdot A + \mu \cdot A && \text{(Rechtsdistributivität der skalaren Multiplikation)}\\
\lambda \cdot (\mu \cdot A) &= (\lambda \cdot \mu) \cdot A && \text{(Assoziativität der skalaren Multiplikation)}\\
1 \cdot A &= A && \text{(Einselement und skalare Multiplikation)}\\
0 \cdot A &= O_{m,n} && \text{(Nullelement und skalare Multiplikation)}\\
A \cdot (B \cdot C) &= (A \cdot B) \cdot C && \text{(Assoziativität der Multiplikation)}\\
A \cdot (B + C) &= A \cdot B + A \cdot C && \text{(Linksdistributivität der Multiplikation)}\\
(A + B) \cdot C &= A \cdot C + B \cdot C && \text{(Rechtsdistributivität der Multiplikation)}\\
I_m \cdot A &= A && \text{(Linksneutrales Element der Multiplikation)}\\
A \cdot I_n &= A && \text{(Rechtsneutrales Element der Multiplikation)}\\
\lambda \cdot (A \cdot B) &= (\lambda \cdot A) \cdot B && \text{(Assoziativität für gemischte Multiplikation)}\\
\lambda \cdot (A \cdot B) &= A \cdot (\lambda \cdot B) && \text{(Assoziativität für gemischte Multiplikation)}
\end{aligned}
$$

Insbesondere ist die Menge aller $m \times n$-Matrizen über K zusammen mit der Addition und dem neutralen Element $O_{m,n}$ eine abelsche Gruppe.

Die Menge aller $m \times m$-Matrizen über K zusammen mit der Addition und Multiplikation und dem Nullelement $O_{m,m}$ und dem Einselement I_m ist ein unitärer Ring.

Vorsicht: Für $m \geqslant 2$ ist dieser Ring weder kommutativ noch ein Schiefkörper.



Bsp.: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Bsp.: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $A' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

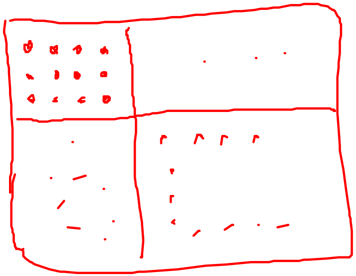
$$\underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix}} \overset{?}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

kein inverses Element.

Bemerkung: Teilt man eine Matrix horizontal und/oder vertikal in Teilmatrizen auf, so spricht man von einer *Blockmatrix*. Für die Addition und Multiplikation von Blockmatrizen passender Grösse gelten die entsprechenen Formeln wie in §~~??~~. Zum Beispiel gilt für beliebige 2×2-Matrizen A_{ij} and B_{ij}:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} \\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22} \end{pmatrix}.$$



$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

3.4 Transposition

Definition: Die *Transponierte* einer $m \times n$-Matrix $\boxed{A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}}$ ist die durch Vertauschen der Zeilenindizes mit den Spaltenindizes entstehende $n \times m$-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A^T := \boxed{(a_{ij})_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ 1 \leqslant i \leqslant m}}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

(Beachte: Hier bezeichnet der erste Index j die Zeile, der zweite i die Spalte.)

Proposition: Für alle Matrizen A, B über K und alle $\lambda \in K$ gilt, sofern die Matrizen die für die jeweilige Formel richtige Grösse besitzen:

$$\begin{aligned} (A^T)^T &= A \\ (A+B)^T &= A^T + B^T \\ (\lambda \cdot A)^T &= \lambda \cdot A^T \\ (A \cdot B)^T &= B^T \cdot A^T \\ O_{m,n}^T &= O_{n,m} \\ I_m^T &= I_m \end{aligned}$$

$$B^T = (b_{jk})_{k,j}$$

$$A^T = (a_{ij})_{j,i}$$

$$B^T \cdot A^T = \Big(\sum_j b_{jk} \cdot a_{ij}\Big)_{k,i}$$

$$A = (a_{ij})_{i,j}$$

$$B = (b_{jk})_{j,k}$$

$$AB = \Big(\sum_j a_{ij} \cdot b_{jk}\Big)_{i,k} \Rightarrow (AB)^T = \Big(\sum_j a_{ij} \cdot b_{jk}\Big)_{k,i}$$

$$\Rightarrow (AB)^T = B^T A^T.$$

3.5 Invertierbare Matrizen

Definition: Eine $m \times m$-Matrix A, zu der eine $m \times m$-Matrix A' existiert mit $\boxed{A \cdot A' = A' \cdot A = I_m}$, heisst *invertierbar*. Die betreffende Matrix A' heisst dann *Inverse von A* und wird mit A^{-1} bezeichnet. Die Menge aller invertierbaren $m \times m$-Matrizen über K wird mit $GL_m(K)$ bezeichnet.

general linear group.

Proposition: Die Menge $GL_m(K)$ zusammen mit der Matrixmultiplikation und dem Einselement I_m bildet eine Gruppe. Insbesondere gilt für alle $m \times m$-Matrizen A und B:

(a) Ist A invertierbar, so ist die Inverse A^{-1} eindeutig bestimmt.

(b) Ist A invertierbar, so ist auch A^{-1} invertierbar mit $(A^{-1})^{-1} = A$.

(c) Sind A und B invertierbar, so ist $A \cdot B$ invertierbar und $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

(d) Ist A invertierbar, so ist B invertierbar genau dann wenn $A \cdot B$ invertierbar ist genau dann wenn $B \cdot A$ invertierbar ist.

(e) Es ist A invertierbar genau dann, wenn A^T invertierbar ist, und dann ist $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Bew.: Gruppe: Assoziativ. Ein. Inverse ✓

(a) $AA' = A'A = I_m$, $AA'' = A''A = I_m$ $\Rightarrow$ $(A'A)A'' = I_m A'' = A''$

$$\begin{aligned} (A'A)A'' &= I_m A'' = A'' \\ &\| \\ A'(AA'') &= A' I_m = A' \end{aligned}$$

(b) $AA' = A'A = I_m$

$A'A = AA' = I_m$

$\Rightarrow$ A erfüllt die Bedingung an das Inverse von A'.

$\Rightarrow A = (A^{-1})^{-1}$ qed.

Rest analog.